Funkcje analityczne*

Piotr Nayar, kolokwium II
21.01.2023, 10:00–15:00

Zasady: Trzeba wybrać 5 zadań i zaznaczyć, że mają one liczyć się do wyniku z kolokwium. Pozostałe zadania też można rozwiązać. Za każde takie zadanie doliczę 5 punktów do wyniku z prac domowych.

W poniższych zadaniach przyjmujemy oznaczenie $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

Zadanie 1. Niech $f : \{|z| < R\} \to \mathbb{C}$ będzie holomorficzna i niech $R_n(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$. Udowodnij, że

$$R_n(z) = \frac{z^{n+1}}{2\pi i} \int_{C(r)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}(\xi - z)} \mathrm{d}\xi,$$

dla wszystkich $|z| < r < R$, gdzie $C(r)$ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w 0 i promieniu r.

Zadanie 2. Oblicz $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + n^{-3})$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieją niestałe funkcje całkowite f, g spełniające równanie $f^n + g^n = 1$.

Zadanie 4. Rozstrzygnij, czy istnieje $r > 0$ spełniające następujący warunek: dla każdej funkcji holomorficznej $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ spełniającej $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 1$ mamy $\{|z| < r\} \subseteq f(\mathbb{D})$.

Zadanie 5. Załóżmy, że f jest funkcją eliptyczną rzędu r, której równoległobok okresowości jest równy $R = \{x + iy : x, y \in [0, 1)\}$. Załóżmy, że $a_1, \ldots, a_r$ oraz $b_1, \ldots, b_r$ są zerami i biegunami funkcji f w R (licząc z krotnościami). Wykaż, że istnieją $n, m \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$\sum_{k=1}^{r}(a_k - b_k) = n + im.$$

Zadanie 6. Niech $f : \mathbb{D} \to \{\operatorname{Re} z > 0\}$ będzie funkcją holomorficzną spełniającą $f(0) = 1$.

(a) Wykaż, że $f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, gdzie $|a_n| \leq 2$.

(b) Udowodnij nierówność $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$.